Краткая теория погрешностей

I. Измерение физических величин.

измерения

прямые – измерения, которые представляют собой сравнение значения физической величины с ее эталоном при помощи измерительного прибора.

косвенные – измерения, которые представляют собой вычисление значения физической величины по формуле, связывающей эту величину с другими, значения которых измерены.

Измерения могут быть **однократными** и **многократными**.

II. Погрешности измерений.

Приборы, которыми мы пользуемся при измерениях, несовершенны, также как и наши органы чувств. Это (вместе с другими причинами) приводит к тому, что результаты измерений дают не **истинное** значение физическое величины, а **приближенное ее значение**. Поэтому существуют погрешности (ошибки) измерений. Они подразделяются на систематические, случайные и промахи.

III. Расчёт величины случайной погрешности при прямых измерениях.

1) **При однократных прямых измерениях** величину погрешности принимают равной цене деления прибора (или половине цены деления, если деления расположены не очень часто и можно определить, к какому из двух соседних делений значение измеряемой величины ближе). Предел допустимой погрешности цифрового измерительного прибора рассчитывают по паспортным данным, содержащим формулу для расчета погрешности именно данного прибора. При отсутствии паспорта за оценку погрешности принимают единицу наименьшего разряда цифрового индикатора. Так, при наблюдаемой на индикаторе частоте 161,2 кГц погрешность частотомера оценивают как 0,1 кГц.

2) **Многократные прямые измерения** проводятся для уменьшения случайной погрешности.

Пусть есть несколько значений одной и той же физической величины x, измеренных при одних и тех же условиях: x_1, x_2, x_3, . . ., x_i, . . . x_n, где n – объём выборки.

- За наиболее близкое к истинному значению величины x принимают *среднее арифметическое из n измерений:*

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_i + \ldots x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (1).$$

- Выборочная дисперсия: $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$ (2).

- Несмещённая оценка дисперсии:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \qquad (3)$$

Замечание: *несмещённой оценкой дисперсии пользуются обычно при малых выборках (при n <30), так как при больших объёмах выборки значения, вычисленные по формулам (2), (3), незначительно отличаются друг от друга.*

- Среднеквадратическое отклонение выборочной средней:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2}{n-1}} \qquad (4)$$

- Оценка среднеквадратического отклонения средней величины:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \qquad (5)$$

- Абсолютная случайная погрешность:

$$\Delta x = t_{n,\alpha} \cdot S_{\bar{x}}\ , \qquad (6)$$

где $t_{n,\alpha}$ – коэффициент Стъюдента при доверительной вероятности α (см. таблицу 1).

Таблица коэффициентов Стъюдента

таблица 1

α n	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	95%	96%	99%	99,9%
2	0,16	0,33	0,51	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,3
3	0,14	0,29	0,45	0,62	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	0,14	0,28	0,42	0,58	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	0,13	0,27	0,41	0,57	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	0,13	0,27	0,41	0,56	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	0,13	0,27	0,40	0,55	0,72	0,91	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	0,13	0,26	0,40	0,54	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	0,13	0,26	0,40	0,54	0,71	0,89	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
11	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6
12	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
13	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,3
14	0,13	0,26	0,39	0,54	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2
15	0,13	0,26	0,39	0,54	0,70	0,87	1,1	1,3	1,8	2,2	2,6	3,0	4,1
16	0,13	0,26	0,39	0,54	0,70	0,87	1,1	1,3	1,8	2,2	2,6	2,9	4,0

Кроме разброса в разных измерениях значений физической величины x каждое измерение выполняется с погрешностью прибора $\Delta x_{\text{ïð}}$, равной цене (или половине цены) деления прибора.

Абсолютная погрешность, учитывающая оба этих фактора, определяется:

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta x_{\text{ïð}})^2} \qquad (7).$$

- *Относительная погрешность:*

$$\text{E} = \frac{\Delta \text{x}}{\bar{\text{x}}} \cdot 100 \qquad (8).$$

- Результат измерений записывается в виде:

$$\text{x} = \bar{\text{x}} \pm \Delta\text{x} \qquad (9).$$

Это запись означает, что **истинное значение физической величины x находится в указанном интервале с вероятностью α.**

IV. Расчёт случайной погрешности при косвенных измерениях.

1) **Однократными косвенными измерениями** называют такие, при которых все величины, входящие в расчётную формулу, измеряются однократно.

В общем случае физическая величина, измеряемая косвенным путём, может рассматриваться как функция нескольких переменных.

- Для величины $f = f(x,y,z,...)$ *абсолютная погрешность* определяется как полный дифференциал функции многих переменных:

$$\Delta f = \left|f_x(\bar{x})\cdot\Delta x\right| + \left|f_y(\bar{y})\cdot\Delta y\right| + \left|f_z(\bar{z})\cdot\Delta z\right| + ... \approx df\,. \qquad (10)$$

- *Относительная погрешность*:

$$E(\bar{f}) = \frac{\Delta f}{\bar{f}} = \frac{df}{\bar{f}} = \frac{1}{\bar{f}}\cdot df = \frac{d(\ln\bar{f})}{df}\cdot df = d(\ln\bar{f})\,. \qquad (11)$$

Используя выражения (10) и (11), можно получить более простые и легкие для запоминания формулы для расчёта абсолютной и относительной погрешностей наиболее часто встречающихся функций (см. таблицу 2).

таблица 2

Функция f	Абсолютная погрешность $\Delta f = E(f)\cdot f$	Относительная погрешность $E(f) = \frac{\Delta f}{f}$
$x \pm y \pm ...$	$\Delta x \pm \Delta y \pm ...$	$\frac{\Delta x + \Delta y}{x \pm y}$
$C\cdot x\cdot y\cdot ...$ $(C - const)$	$(C\cdot y\cdot ...\cdot\Delta x) + (C\cdot x\cdot ...\cdot\Delta y) + ...$	$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + ... = E(x) + E(y) + ...$
$C\cdot\frac{x}{y}\cdot ...$	$\left(\frac{C}{y}\cdot ...\cdot\Delta x\right) + \left(\frac{C\cdot x}{y^2}\cdot ...\cdot\Delta y\right) + ...$	$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + ... = E(x) + E(y) + ...$
$C\cdot x^n\cdot y^m\cdot ...$ $(n, m - const)$	$\left(C\cdot n\cdot x^{n-1}\cdot y^m\cdot ...\cdot\Delta x\right) +$ $+\left(C\cdot x^n\cdot m\cdot y^{m-1}\cdot ...\cdot\Delta y\right) + ...$	$n\cdot\frac{\Delta x}{x} + m\cdot\frac{\Delta y}{y} + ... =$ $= n\cdot E(x) + m\cdot E(y) + ...$

2) **Многократные косвенные измерения** – это измерения, при которых хотя бы одна из величин, входящих в расчётную формулу, измеряется многократно.

- *Абсолютная погрешность*:

$$\Delta f = \sqrt{\left(f_x(\bar{x})\right)^2\cdot(\Delta x)^2 + \left(f_y(\bar{y})\right)^2\cdot(\Delta y)^2 + \left(f_z(\bar{z})\right)^2\cdot(\Delta z)^2 + ...} \qquad (12)$$

- *Относительная погрешность*:

$$E(\bar{f}) = \frac{\Delta f}{\bar{f}} = \frac{\sqrt{\left(f_x(\bar{x})\right)^2\cdot(\Delta x)^2 + \left(f_y(\bar{y})\right)^2\cdot(\Delta y)^2 + \left(f_z(\bar{z})\right)^2\cdot(\Delta z)^2 + ...}}{\bar{f}} =$$
$$\sqrt{\frac{\left(f_x(\bar{x})\right)^2\cdot(\Delta x)^2}{(\bar{f})^2} + \frac{\left(f_y(\bar{y})\right)^2\cdot(\Delta y)^2}{(\bar{f})^2} + \frac{\left(f_z(\bar{z})\right)^2\cdot(\Delta z)^2}{(\bar{f})^2} + ...} \qquad (13)$$

Используя выражения (12) и (13), можно получить более простые и легкие для запоминания формулы для расчёта абсолютной и относительной погрешностей наиболее часто встречающихся функций (см. таблицу 3).

таблица 3

Функция f	Абсолютная погрешность $\Delta f = E(f)\cdot f$	Относительная погрешность $E(f) = \dfrac{\Delta f}{f}$
$x \pm y \pm \ldots$	$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \ldots}$	$\dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \ldots}}{x \pm y}$
$C\cdot x\cdot y\cdot\ldots$ $(C - const)$	$\sqrt{(C\cdot y\cdot\ldots\cdot\Delta x)^2 + (C\cdot x\cdot\ldots\cdot\Delta y)^2 + \ldots}$	$\sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2 + \ldots} = \sqrt{E^2(x) + E^2(y) + \ldots}$
$C\cdot\dfrac{x}{y}\cdot\ldots$	$\sqrt{\left(\dfrac{C}{y}\cdot\ldots\cdot\Delta x\right)^2 + \left(\dfrac{C\cdot x}{y^2}\cdot\ldots\cdot\Delta y\right)^2 + \ldots}$	$\sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2 + \ldots} = \sqrt{E^2(x) + E^2(y) + \ldots}$
$C\cdot x^n\cdot y^m\cdot\ldots$ $(n,m - const)$	$\sqrt{(C\cdot n\cdot x^{n-1}\cdot y^m\cdot\ldots\cdot\Delta x)^2 + (C\cdot x^n\cdot m\cdot y^{m-1}\cdot ..}$	$\sqrt{n^2\cdot\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + m^2\cdot\left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2 + \ldots} = \sqrt{n^2\cdot E^2(x) + m^2\cdot E^2(y) + \ldots}$

V. Округление погрешности и результата.

При обработке полученных результатов измерений необходимо округлять абсолютную погрешность и среднее арифметическое значение. При этом необходимо руководствоваться следующими соображениями.

1) Вначале округляется **абсолютная погрешность**, т. к. от результатов этого округления зависит округление среднего арифметического значения. Округление производится до одной **значащей цифры** или до двух, если первая значащая цифра – 1, **с завышением**, чтобы не уменьшить ширину числового интервала, а следовательно, и доверительную вероятность попадания истинного значения величины в заданный интервал.

Замечание: *значащими цифрами в десятичной записи числа являются все цифры, кроме нулей перед отличными от нуля цифрами числа, по модулю меньшего единицы.*

Пример:

a) $0{,}003806 \approx 0{,}004$, т.к. первые три нуля числа $0{,}003806$, меньшего единицы, значащими не являются. В этом числе 4 значащих цифры, в том числе и нуль в предпоследнем разряде.
b) $1{,}571 \approx 1{,}6$
c) $25062{,}11 \approx 30000$
d) $0{,}013289 \approx 0{,}014$
e) $8{,}878 \approx 9$

2) Затем по обычным правилам округляется **среднее арифметическое значение** до того разряда, в котором находится последняя значащая цифра округленной абсолютной погрешности. В окончательной записи среднего арифметического следует использовать стандартную запись числа (число от 1 до 10, умноженное на 10 в какой-либо степени). При этом погрешность записывается в этом же виде с той же степенью у 10.

Примеры:

1) $0{,}045871 \pm 0{,}000459 \approx 0{,}0459 \pm 0{,}0005 \approx (4{,}59 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-2}$

2) $258{,}9935 \pm 2{,}571 \approx 259 \pm 3 \approx (2{,}59 \pm 0{,}03) \cdot 10^{2}$

3) $258{,}9935 \pm 1{,}571 \approx 259{,}0 \pm 1{,}6 \approx (2{,}590 \pm 0{,}016) \cdot 10^{2}$

4) $8{,}1802 \cdot 10^{7} \pm 1{,}412 \cdot 10^{6} \approx 81{,}8 \cdot 10^{6} \pm 1{,}5 \cdot 10^{6} \approx (8{,}18 \pm 0{,}15) \cdot 10^{7}$

VI. Теория нониуса.

При измерении длин используют штангенциркуль и микрометр, которые имеют нониусные шкалы. **Нониус** – дополнительная шкала к обычному масштабу, позволяющая производить измерения точнее, чем цена деления основного масштаба.

Правило измерения длины при помощи штангенциркуля: длина отрезка, измеряемого при помощи штангенциркуля, равна длине, измеренной при помощи основной линейки l_1 плюс точность нониуса Δx, умноженная на номер того деления нониуса, который совпадает с некоторым делением основного масштаба n, т.е. $l_2 = n \cdot \Delta x$. Таким образом,

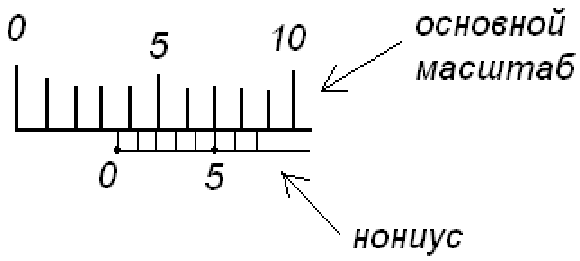
$$L = l_1 + n \cdot \Delta x. \qquad (14)$$

Приборная погрешность нониуса равна половине его точности.

Пример 1: длина на рисунке 1

$$L = 3 + 5 \cdot 0{,}1 = 3{,}5(мм)$$

Рисунок 1



Измерение длин с помощью микрометра.

Измеряемый объект зажимается с помощью винта. Процесс измерения.

- Предмет помещают между винтом и упором. Вращая барабан доводят винт до соприкосновения с предметом. Окончательное нажатие винтом на предмет осуществляют рукояткой (головкой) винта, при этом момент нажатия фиксируется слабым треском.
- Производят отсчёт по шкалам:
  в мм – по линейной шкале;
  доли мм – по круглому нониусу (барабану).

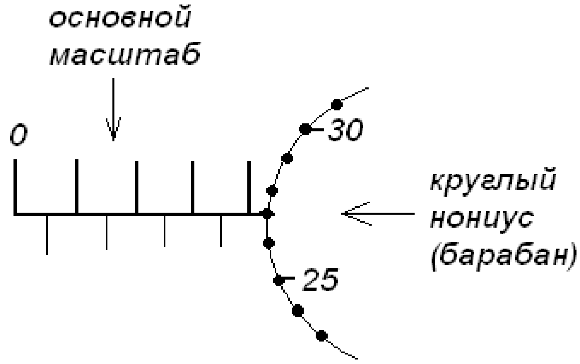
Замечание 1. *Перед началом измерений необходимо убедиться, что нули нониуса и линейной шкалы совпадают.*

Замечание 2. *Если при измерении была открыта половина деления основного масштаба, то при записи показания микрометра необходимо её учесть (см. пример 3).*

Пример 2: длина на рисунке 2

$$L = 4 + 27 \cdot 0{,}01 = 4{,}27(\textit{мм})$$

Рисунок 2



Пример 3: длина на рисунке 3

$$L = 5 + 0{,}5 + 38 \cdot 0{,}01 = 5{,}88(\textit{мм})$$

Рисунок 3